DS n°3 – TS2 2013
Titrages et lois de Newton

Exercice 1 – Comme un poisson dans l'eau

Cet exercice comporte une annexe,
notée ANNEXE 1 page 5, à rendre avec la copie.

L'aquariophilie est une passion qui touche de plus en plus d'amateurs mais aussi de néophytes. De nombreux facteurs peuvent contribuer à un déséquilibre dangereux pour la vie et la santé des poissons. Il est donc nécessaire de contrôler régulièrement la qualité de l'eau.
Le pH de l'eau est la première grandeur qu'il faut mesurer, au moins une fois par semaine, et ajuster éventuellement. En effet, certains poissons ne peuvent évoluer que dans un milieu acide (c'est le cas des poissons d'Amazonie comme les Néons ou les Tétras), d'autres dans un milieu basique (c'est le cas des poissons d'Amérique Centrale comme les Platy et les Molly). Aucun de ces poissons ne tolère une trop forte teneur en ions ammonium ($NH_{4\,(aq)}^{+}$) ou en ions nitrite ($NO_{2\,(aq)}^{-}$) : le cycle de l'azote doit donc être surveillé en évitant soigneusement la surpopulation de l'aquarium et l'excès de nourriture.

D'après « Poissons et aquariums »— Édition Larousse.

L'exercice suivant est destiné à préciser certains points de ce texte. On étudie d'abord un produit commercial utilisé pour diminuer le pH de l'eau de l'aquarium ; on s'intéresse ensuite à la formation des ions ammonium.

Les parties 1 et 2 sont totalement indépendantes.

1. Étude d'une solution commerciale destinée à diminuer le pH de l'aquarium

Sur l'étiquette du produit on peut lire que la solution commerciale S_0 est constituée d'acide chlorhydrique ($H_3O^+_{(aq)}$ + $C\ell^-_{(aq)}$) mais aucune concentration n'est indiquée. La transformation conduisant à l'acide chlorhydrique étant totale, la concentration c_0 de la solution commerciale est égale à la concentration en ions $H_3O^+_{(aq)}$. On cherche à déterminer cette concentration en faisant un titrage pH-métrique. Pour cela on dilue 50 fois la solution commerciale et on procède au titrage d'un volume $V_A = 20,0$ mL de la solution diluée S_A à l'aide d'une solution d'hydroxyde de sodium S_B ($Na^+_{(aq)}$ + $OH^-_{(aq)}$) de concentration molaire en soluté apporté $c_B = 4,0 \times 10^{-2}$ mol·L^{-1}. On obtient la courbe de la figure 1. On a également fait apparaître la courbe représentant la dérivée du pH en fonction du volume de soude versé.

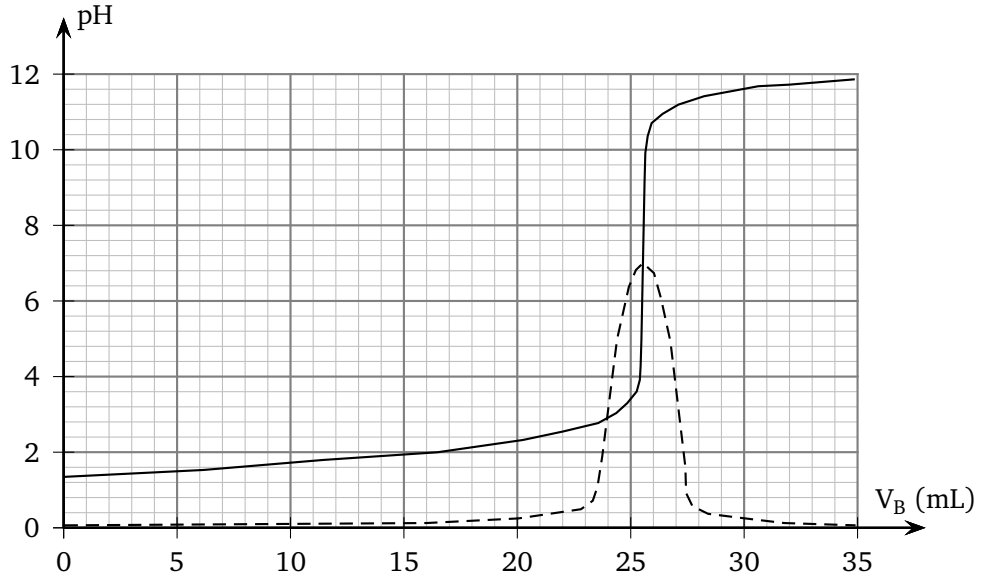


Fig. 1 – Titrage de la solution commerciale diluée par la soude.

1.1. Écrire l'équation de la réaction support du titrage.

1.2. Quelles propriétés doit avoir une réaction de dosage ?

1.3. *Étude de l'équivalence*

1.3.1. Définir l'équivalence.

1.3.2. En déduire la valeur de la concentration des ions oxonium dans la solution diluée S_A.

1.3.3. Montrer que dans la solution commerciale, la concentration des ions oxonium $[H_3O^+]$ est *voisine* de $2,5\ mol\cdot L^{-1}$. Cette valeur sera utilisée pour la suite de l'exercice.

1.3.4. Parmi les indicateurs suivants, lequel utiliser comme indicateur de fin de réaction du dosage et pourquoi ?

Indicateur coloré	Teinte acide	Teinte basique	pK_A
Hélianthine	Jaune orangé	Rouge	3,7
Vert de bromocrésol	Jaune	Bleu	4,7
Bleu de bromothymol	Jaune	Bleu	7,0
Phénolphtaléine	Incolore	Fuschia	9,4

1.3.5. Représenter son diagramme de prédominance.

1.3.6. Décrire le changement de couleur observé lors de l'équivalence.

1.4. On désire diminuer le pH de l'eau de l'aquarium et l'amener à une valeur proche de 6 alors qu'il était initialement égal à 7. Sur le mode d'emploi du fabricant on peut lire qu'il faut verser, en une fois, 20 mL de la solution commerciale dans 100 L d'eau. Pour simplifier le calcul, on considérera que le volume final reste égal à 100 L.

Quelle serait la valeur du pH final de l'eau de l'aquarium s'il n'y avait qu'une simple dilution des ions $H_3O^+_{(aq)}$?

2. Étude de la formation des ions ammonium.

L'urée, de formule $(NH_2)_2\,CO_{(aq)}$, est un polluant de l'aquarium. Elle est contenue dans les déjections de certains poissons et conduit, au cours d'une réaction lente, à la formation d'ions ammonium $NH^+_{4\,(aq)}$ et d'ions cyanate $OCN^-_{(aq)}$ selon l'équation :

$$(NH_2)_2\,CO_{(aq)} \rightleftarrows NH^+_{4\,(aq)} + OCN^-_{(aq)} \qquad (1)$$

L'étude de la cinétique de cette réaction (1) peut être réalisée par conductimétrie. Pour cela on prépare un volume $V = 100,0$ mL d'une solution d'urée de concentration molaire en soluté apporté égale à $c = 0,020\ mol\cdot L^{-1}$ et on suit sa décomposition en la maintenant dans un bain marie à 45°C. À différentes dates, on mesure la conductivité σ de la solution.

2.1. Montrer que la concentration de la solution en ions $NH^+_{4\,(aq)}$ peut être déterminée à partir de la mesure de la conductivité σ de la solution, les conductivités molaires ioniques étant connues.

2.2. *Évolution du système chimique*

2.2.1. Compléter littéralement le tableau descriptif de l'évolution du système, figurant en annexe 1 page 5 à rendre avec la copie.

2.2.2. En déduire la relation, à chaque instant, entre la concentration en ions $NH^+_{4\,(aq)}$ en solution et l'avancement de la réaction.

2.2.3. Calculer l'avancement maximal x_{max}.

2.3. On peut représenter l'évolution de l'avancement de la réaction en fonction du temps (voir figure 2 en annexe 1 page 5 à rendre avec la copie). Par lecture graphique, trouver $x_{110} = x(t = 110\ min)$ l'avancement à l'instant de date $t = 110$ min et en déduire le taux d'avancement $\tau = \frac{x_{110}}{x_{max}}$.

2.4. En poursuivant l'expérience pendant une durée suffisante, on obtient une concentration finale : $[NH^+_4]_f = 2,0 \times 10^{-2}\ mol\cdot L^{-1}$.

Déterminer le taux d'avancement final de cette transformation. Cette transformation est-elle totale ?

2.5. Les ions ammonium finissent par se transformer en ions nitrate dont l'accumulation risque de compromettre la vie des poissons. Ces derniers ions constituent un aliment essentiel pour les plantes vertes de l'aquarium. Expliquer pourquoi dans les livres d'aquariophilie, on dit que l'aquarium doit être « bien planté ».

Exercice 2 – La chute des boulets (LoL !)

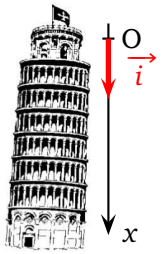


FIG. 3 – Tour de pise.

1. GALILÉE À PISE

Selon la légende, GALILÉE (1564-1642) aurait étudié la chute des corps en lâchant divers objets du sommet de la tour de PISE (Italie), sa ville de naissance. Il y fait référence dans deux ouvrages : *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* et *Discours concernant deux sciences nouvelles* dans lesquels il remet notamment en question les idées d'ARISTOTE.

Dans cette partie, on présente trois courts extraits de ces deux livres. Il s'agit de retrouver certains résultats avancés par GALILÉE concernant la chute verticale dans l'air d'un boulet sphérique en fer, lâché sans vitesse initiale. Pour cette étude, on choisit le référentiel terrestre, supposé galiléen, auquel on adjoint un repère d'espace (Ox) vertical orienté vers le bas (figure 3).

Donnée : Intensité du champ de pesanteur, supposé uniforme : $g = 9,8\ m\cdot s^{-2}$.

1.1. *Étude des hauteurs de chute*

> Extrait n°1 :
> « Avant tout, il faut considérer que le mouvement des corps lourds n'est pas uniforme : partant du repos, ils accélèrent continuellement (...). Si on définit des temps égaux quelconques, aussi nombreux qu'on veut, et si on suppose que, dans le premier temps, le mobile, partant du repos, a parcouru tel espace, par exemple une aune(*), pendant le second temps, il en parcourra trois, puis cinq pendant le troisième (...) et ainsi de suite, selon la suite des nombres impairs. »
> (*) Une aune $= 1,14$ m.

Le boulet est lâché au point O, d'abscisse $x_0 = 0$ à la date $t_0 = 0$. On suppose l'action de l'air négligeable ; dans ce cas, l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G du boulet est : $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

1.1.1. Soient x_1 la distance parcourue au bout de la durée τ, x_2 la distance parcourue au bout de la durée 2τ et ainsi de suite, exprimer x_1, x_2, x_3 en fonction de g et de τ.

1.1.2. Exprimer la différence $h_1 = x_1 - x_0$ en fonction de g et de τ puis les différences $h_2 = x_2 - x_1$ et $h_3 = x_3 - x_2$ en fonction de h_1.

1.1.3. Retrouve-t-on la suite des hauteurs de chute annoncée par GALILÉE dans l'extrait n°1 ? Justifier.

1.2. *Étude de la durée de la chute*

Les points de vue d'ARISTOTE et de GALILÉE, au sujet de l'influence de la masse m du boulet sur la durée totale Δt de sa chute, diffèrent.

> Extrait n°2 :
> « Cherchons à savoir combien de temps un boulet, de fer par exemple, met pour arriver sur la Terre d'une hauteur de cent coudées(*).
> ARISTOTE dit qu'une « boule de fer de cent livres(**), tombant de cent coudées, touche terre avant qu'une boule d'une livre ait parcouru une seule coudée », et je vous dis, moi, qu'elles arrivent en même temps.
> Des expériences répétées montrent qu'un boulet de cent livres met cinq secondes pour descendre de cent coudées »
> (*) Une coudée correspond à une distance de 57 cm ;
> (**) Une livre est une unité de masse.

1.2.1. Parmi les propositions ci-dessous, attribuer celle qui correspond à la théorie d'ARISTOTE et celle qui correspond à la théorie de GALILÉE :

a. La durée de chute augmente quand la masse du boulet augmente ;

b. La durée de chute diminue quand la masse du boulet augmente ;

c. La durée de chute est indépendante de la masse.

1.2.2. En utilisant l'expression $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$, calculer la durée Δt de la chute d'un boulet qui tombe d'une hauteur totale $H = 57$ m (100 coudées).

Ce résultat est différent de la valeur annoncée dans l'extrait n°2. Proposer une explication à l'écart constaté.

2. GALILÉE À VENISE

> En 1592, GALILÉE quitte PISE pour l'Université de PADOUE, dépendant de VENISE. Cette dernière ville possède un arsenal tout-à-fait considérable, et la légende raconte qu'il était inutile de chercher GALILÉE dans les salles de l'Université, que l'on avait plus de chance de le trouver sur les chantiers navals, dont il appréciait l'ambiance, et où il a pû faire preuve de son incroyable ingéniosité. GALILÉE a notamment le premier indiqué qu'il faut pointer les fûts de canon à un angle de 45° afin de permettre la distance de tir la plus grande possible.
> Dans les navires de guerre de l'époque, de lourds canons sont fixés au pont, et projètent des boulets de 200 livres (environ 100 kg) portant jusqu'à 1 200 toises (environ 2 400 m). La structure d'un navire est très robuste pour résister à la réaction considérable du boulet et leur échantillon(*) est ordinairement très fort.
> (*) Échantillon : dimension et épaisseur des pièces utilisées en construction navale.

2.1. *Action de la poudre de canon sur le boulet*

L'éjection du boulet est provoquée par la combustion de la poudre. Une force de poussée est donc exercée sur le boulet par l'ensemble {navire + canon + gaz}.

Justifier l'expression soulignée dans le texte encadré ci-dessus, à l'aide d'une des trois lois de NEWTON. Énoncer cette loi (on pourra s'aider d'un schéma).

2.2. *La trajectoire du boulet*

On souhaite étudier la trajectoire du centre d'inertie G du boulet de masse m. L'étude est faite dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le repère d'étude est $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et l'origine des dates est choisie à l'instant où le boulet part du point O (voir figure 4 ci-contre).
Le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ du point G est incliné d'un angle α (appelé angle de tir) par rapport à l'horizontale. Une fois le boulet lancé, la force de poussée de la partie précédente n'intervient plus.

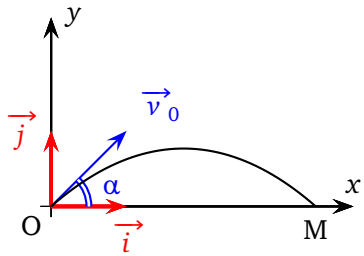


FIG. 4 – Trajectoire du boulet.

Données : boulet utilisé : volume $V = 12,7\ dm^3 = 12,7\ L$ et masse $m = 100\ kg$.
La masse volumique du fer est $\rho_{fer} = 7,87 \times 10^3\ kg \cdot m^{-3}$.
La masse volumique de l'air est $\rho_{air} = 1,29\ kg \cdot m^{-3}$.

2.2.1. Calculer la valeur de la poussée d'Archimède. Grand prince, je vous donne gracieusement son expression littérale $F_A = \rho_{air} g V$.

2.2.2. Calculer la valeur P du poids du boulet après avoir précisé son expression littérale.

2.2.3. Dans cet exercice, on pourra négliger la poussée d'ARCHIMÈDE devant le poids si la valeur de ce dernier est au moins cent fois plus grande que celle de la poussée d'ARCHIMÈDE.
Montrer que l'on est dans cette situation.

2.2.4. Pendant le vol, compte tenu de la masse, de la vitesse et de la forme du boulet, on fait l'hypothèse que les forces de frottement dans l'air sont négligeables devant le poids.
En tenant compte de la remarque et des résultats précédents, établir le bilan des forces exercées sur le système {boulet} pendant le vol.

2.3. *Équation de la trajectoire*

Dans toute cette partie, on négligera la poussée d'ARCHIMÈDE et on ne tiendra pas compte des forces de frottement dues à l'air.

2.3.1. En appliquant la deuxième loi de NEWTON, montrer que les équations horaires du mouvement du point G s'écrivent :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t \end{cases}$$

2.3.2. Montrer que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme $y(x) = Ax^2 + B$. On donnera les expressions littérales de A et B et on précisera leurs unités respectives.

La fin du problème, consacrée à l'équation de la trajectoire, à la portée du tir et à la vérification de la proposition de GALILÉE, *a été retirée afin de limiter l'épreuve à 2 h.*

Nom : ..... **Prénom :** .....

ANNEXE 1 — À rendre avec la copie

2. Étude de la formation des ions ammonium

Tableau d'évolution du système chimique

Équation		$(NH_2)_2CO_{(aq)}$ ⇄ $NH_{4\,(aq)}^{+}$ + $OCN^{-}{}_{(aq)}$		
État	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)		
État initial	$x = 0$			
État en cours	x			
État final en considérant la réaction totale	$x_{max} =$			

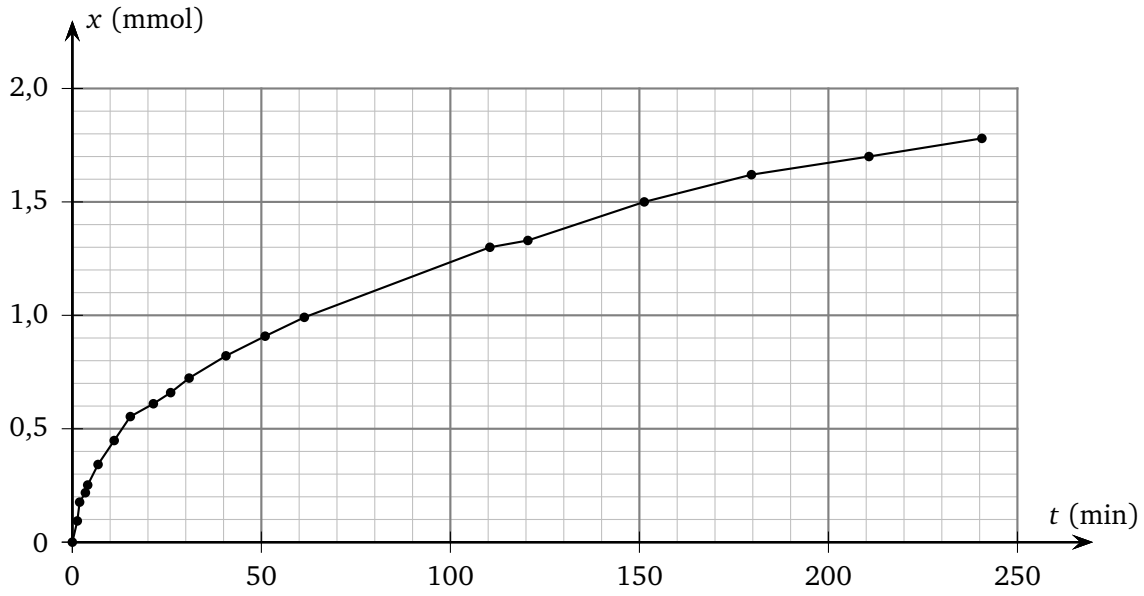


Fig. 2 – Décomposition de l'urée.

Corrigé du DS n°3 – TS2 2013
Titrages et lois de Newton

Exercice 1 – Comme un poisson dans l'eau

1. Étude d'une solution commerciale

1.1. La solution titrée contient des ions oxonium $H_3O^+_{(aq)}$. Cette espèce chimique intervient dans le couple (H_3O^+/H_2O). La solution titrante contient des ions hydroxyde $OH^-_{(aq)}$, qui interviennent dans le couple (H_2O/OH^-). C'est assez pour écrire deux demi-équations acido-basiques et une équation-bilan support du dosage :

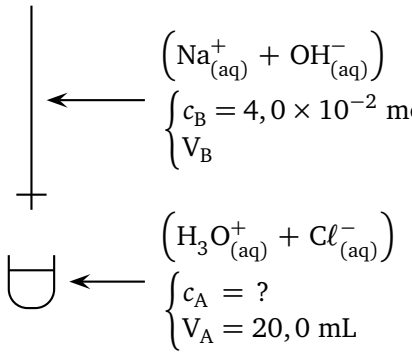
$$\begin{array}{rcl} H_3O^+ & = & H_2O + H^+ \\ OH^- + H^+ & = & H_2O \\ \hline H_3O^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} & \rightarrow & 2\,H_2O_{(\ell)} \end{array}$$

On utilise une simple flèche pour cette équation, puisqu'elle doit être totale (question suivante).

1.2. Une réaction de dosage doit être totale, unique, rapide, avec une équivalence facile à repérer.

1.3.1. À l'équivalence, les réactifs titrant & titré ont été introduits dans les proportions stœchiométriques. Les coefficients stœchiométriques valant tous 1 dans l'équation support de titrage :

$$n(H_3O^+)_{\text{dosé}} = n(OH^-)_{\text{versé}} \quad \Leftrightarrow \quad n_A = n_B$$



1.3.2. À l'équivalence :

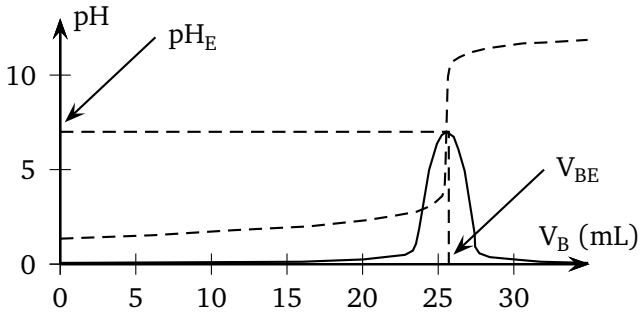
$$c_A V_A = c_B V_{BE} \quad \Leftrightarrow \quad c_A = \frac{c_B V_{BE}}{V_A}$$

Le volume équivalent V_{BE} est déterminé par l'abscisse du maximum de la courbe dérivée du pH, en traits pointillés. L'échelle en abscisse est telle que 35,0 mL font 10,5 cm (sur la figure 1 de l'énoncé). Le volume V_{BE} à l'équivalence est quant à lui à 7,7 cm, donc une abscisse :

$$V_{BE} = \frac{35{,}0}{10{,}5} \times 7{,}7 = 25{,}7 \text{ mL}$$

Le pH à l'équivalence est mesuré par l'ordonnée du point équivalent E sur la courbe $\text{pH} = f(t)$ en traits pleins. L'échelle en ordonnée est telle que 12,0 unités de pH correspondent à 6,0 cm, et l'ordonnée du point équivalent E est à 3,5 cm, de sorte que :

$$\text{pH}_E = \frac{12{,}0}{6{,}0} \times 3{,}5 = 7{,}0$$



Application numérique :

$$c_A = \frac{4{,}0 \times 10^{-2} \times 25{,}7}{20{,}0}$$

$$c_A = 5{,}1 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

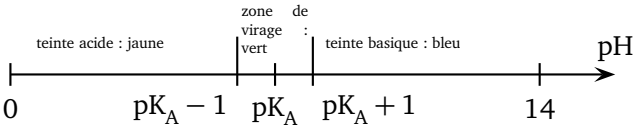
1.3.3. La solution commerciale a été diluée 50 fois :

$$[H_3O^+] = 50 \cdot c_A$$
$$[H_3O^+] = 50 \times 5{,}1 \times 10^{-2} = 2{,}6 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Ainsi, la concentration en ions oxonium $H_3O^+_{(aq)}$ est bien *voisine* de $2{,}5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

1.3.4. Tel que déterminé précédemment, le pH à l'équivalence vaut 7,0. Un indicateur coloré convient si sa zone de virage encadre le pH à l'équivalence. La zone de virage est par convention délimitée par $pK_A \pm 1$, donc le bleu de bromothymol, tel que $pK_A = 7{,}0$, convient parfaitement.

1.3.5. Diagramme de prédominance de l'indicateur :



1.3.6. Lors de l'équivalence, la teinte de l'indicateur passe du jaune (teinte acide) au bleu (teinte basique), avec obtention de la teinte sensible verte à la goutte près exactement à l'équivalence.

1.4. Dilution des 20 mL de solution commerciale :

$$\begin{cases} c_1 = 2{,}5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ V_1 = 20 \text{ mL} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \text{?} \\ V_2 = 100 \text{ L} \end{cases}$$

$$c_1 V_1 = c_2 V_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = c_1 \frac{V_1}{V_2}$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = 2,5 \times \frac{0,020}{100} = 5,0 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Dans l'hypothèse d'une simple dilution, on a donc $[H_3O^+] = 5,0 \times 10^{-4}$ mol · L^{-1}, d'où un pH :

$$\text{pH} = -\log [H_3O^+]$$
$$\text{pH} = -\log \left(5,0 \times 10^{-4}\right) = 3,3$$

2. Étude de la formation des ions ammonium

2.1. La conductivité d'une solution électrolytique est liée aux concentrations c_i des ions en solution et à leurs conductivités molaires partielles λ_i :

$$\sigma = \sum_i \lambda_i c_i$$

La conductivité de la solution étudiée est assurée par les ions présents majoritairement : ions ammonium $NH_{4\,(aq)}^+$ et cyanate $OCN^-_{(aq)}$(on fait l'hypothèse que la contribution des ions $OH^-_{(aq)}$ et $H_3O^+_{(aq)}$, provenant de l'autoprotolyse de l'eau, est négligeable). La conductivité σ de la solution s'exprime donc comme :

$$\sigma = \lambda_{NH_4^+}[NH_4^+] + \lambda_{OCN^-}[OCN^-]$$

Les coefficients stœchiométriques de l'équation (2) indiquent que les ions ammonium et cyanate se forment en quantités égales, donc :

$$[NH_4^+] = [OCN^-]$$

On a donc, pour la conductivité σ :

$$\sigma = \left(\lambda_{NH_4^+} + \lambda_{OCN^-}\right)[NH_4^+]$$

ce qui permet d'exprimer la concentration de la solution en ions ammonium $NH_{4\,(aq)}^+$:

$$\Leftrightarrow \quad [NH_4^+] = \frac{\sigma}{\lambda_{NH_4^+} + \lambda_{OCN^-}}$$

2.2.1. L'énoncé manquait de clarté sur le fait qu'il fallait faire l'hypothèse d'une réaction totale à ce stade. Le tableau d'avancement est reproduit ci-dessous.

Équation		$(NH_2)_2CO_{(aq)}$ =	$NH_{4(aq)}^+$ +	$OCN^-_{(aq)}$
État	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)		
État initial	$x = 0$	n	0	0
État en cours	x	$n - x$	x	x
État final	x_{max}	0	x_{max}	x_{max}

2.2.2. $[NH_4^+] = \dfrac{x}{V}$

2.2.3. Avancement maximal :

$$n - x_{max} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{max} = n = cV$$

Application numérique :

$$x_{max} = 0,020 \times 100,0 \times 10^{-3}$$
$$x_{max} = 2,0 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

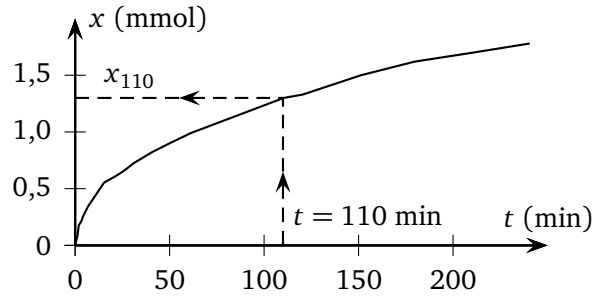
2.3. Lecture graphique à $t = 110$ min :

$$x_{110} = 3,9 \times \frac{2,0}{5,95} = 1,3 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

On en déduit le taux d'avancement à $t = 110$ min :

$$\tau_{110} = \frac{x_{110}}{x_{max}} = \frac{1,3}{2,0} = 65\,\%$$

Courbe reproduisant la figure 2 de l'annexe 1 :



2.4. La concentration finale en ions ammonium permet de déterminer l'avancement final de réaction, toujours à partir du tableau d'avancement de la page précédente :

$$[NH_4^+]_f = \frac{x_f}{V} \quad \Leftrightarrow \quad x_f = [NH_4^+]_f V$$

Application numérique :

$$x_f = 2,0 \times 10^{-2} \times 100,0 \times 10^{-3}$$
$$x_f = 2,0 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

On constate que $x_f = x_{max}$, donc la réaction est totale. Taux d'avancement final :

$$\tau_f = \frac{x_f}{x_{max}} = 1,0$$

2.5. L'aquarium doit être « bien planté » de sorte que les plantes vertes consomment les ions nitrate, afin qu'ils ne s'accumulent pas dans l'aquarium et ne risquent pas de compromettre la vie des poissons.

Exercice 2 – La chute des boulets

1. Galilée à Pise

1.1.1. On applique l'équation horaire $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$:

$$x_1 = \frac{1}{2}g\tau^2 \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{2}g(2\tau)^2 = \frac{4}{2}g\tau^2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}g(3\tau)^2 = \frac{9}{2}g\tau^2$$

1.1.2. On utilise les expressions précédentes :

$$h_1 = x_1 - x_0 = \frac{1}{2}g\tau^2 - 0 = \frac{1}{2}g\tau^2$$
$$h_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2}g\left(4\tau^2 - \tau^2\right) = \frac{3}{2}g\tau^2$$
$$h_3 = x_3 - x_2 = \frac{1}{2}g\left(9\tau^2 - 4\tau^2\right) = \frac{5}{2}g\tau^2$$

On peut alors exprimer chaque hauteur en fonction de h_1 :

$$h_1 = \frac{1}{2}g\tau^2$$
$$h_2 = \frac{3}{2}g\tau^2 = 3h_1$$
$$h_3 = \frac{5}{2}g\tau^2 = 5h_1$$

1.1.3. Oui, on retrouve la suite des hauteurs de chute annoncée par Galilée.
Ainsi, partant de l'instant initial $t = 0$, le corps en chute parcourt la distance h_1 pendant la durée τ ; pendant la même durée supplémentaire, il parcourt la distance $h_2 = 3h_1$, puis encore dans la même durée une distance $h_3 = 5h_1$. Finalement, pour des temps τ égaux, la distance parcourue est la suite arithmétique de raison $2h_1$ et de premier terme h_1, tel qu'annoncé par Galilée.

1.2.1. La proposition **a** n'est à mettre au crédit d'aucun de nos deux illustres scientifiques, quoique Aristote fût plutôt considéré en son temps comme un mathématicien et un philosophe (donc un métaphysicien, de *méta* : « avant »), que comme un scientifique ;
La proposition **b** correspond à l'affirmation d'Aristote — il ne basait pas ses affirmations sur l'expérience, contrairement à Galilée ;
La proposition **c** correspond à l'affirmation de Galilée.
Lors de Bac ces trois réponses ont été notées en « tout ou rien ».

1.2.2. Expression de la durée Δt de la chute en fonction de la hauteur H de chute :

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}g\Delta t^2 = \mathrm{H}$$
$$\Leftrightarrow \quad g\Delta t^2 = 2\mathrm{H}$$
$$\Leftrightarrow \quad \Delta t^2 = \frac{2\mathrm{H}}{g}$$
$$\Leftrightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2\mathrm{H}}{g}}$$

Application numérique :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \times 57}{9,8}} = 3,4 \text{ s}$$

L'extrait n°2 annonce un temps de 5 s. La différence en pourcentage constatée est de :

$$\frac{5 - 3,4}{3,4} = 47\,\%$$

Elle peut provenir du fait que l'équation horaire utilisée pour le calcul n'est valable que dans le cas d'une chute libre, alors que Galilée ne disposait pas des moyens techniques permettant de créer le vide d'air (1654 et Otto von Guericke pour le premier vide), ou tout au moins d'obtenir des frottements négligeables dans un vide partiel, et encore moins de chronométrer les temps de manière précise.

2. Galilée à Venise

2.1. Loi de l'action et de la réaction, ou troisième loi de Newton : « Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction, mais de sens opposés, exercée par le corps B ». La force de poussée exercée par l'ensemble { galiote + canon + gaz } est égale et opposée à la réaction exercée par le système { boulet }.

2.2.1. Poussée d'Archimède : égale et opposée au poids du fluide déplacé, ici l'air, de masse volumique ρ_{air}, avec V pour le volume déplacé :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}} = -\rho_{air}\mathrm{V}\,\overrightarrow{g}$$

En intensité :

$$\mathrm{F_A} = \rho_{air}\mathrm{V}g$$
$$\mathrm{F_A} = 1,29 \times 12,7 \times 10^{-3} \times 9,8 = 0,16 \text{ N}$$

2.2.2. Poids :

$$\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{g}$$

Intensité :

$$\mathrm{P} = mg = 100 \times 9,8 = 9,8 \times 10^2 \text{ N}$$

2.2.3. Rapport des intensités :

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F_A}} = \frac{9{,}8 \times 10^2}{0{,}16} = 6{,}1 \times 10^4$$

Ce rapport est supérieur à 100. On est bien dans le cas où l'on peut négliger la poussée d'Archimède.

2.2.4. Bilan des forces sur le système {boulet} : poids $\overrightarrow{\mathrm{P}}$. Toutes les autres forces sont négligeables, conformément aux questions précédentes. Il s'agit donc d'une chute libre.

2.3.1. Deuxième loi de Newton :

$$\begin{aligned} \sum \overrightarrow{\mathrm{F}}_{\text{ext}} &= m\,\overrightarrow{a}_{\mathrm{G}} \\ \Rightarrow \qquad \overrightarrow{\mathrm{P}} &= m\,\overrightarrow{g} = m\,\overrightarrow{a}_{\mathrm{G}} \\ \Rightarrow \qquad \overrightarrow{a}_{\mathrm{G}} &= \overrightarrow{g} \end{aligned}$$

Projection dans le repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$\overrightarrow{a}_{\mathrm{G}} = \begin{vmatrix} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{vmatrix}$$

Intégration par rapport au temps :

$$\overrightarrow{v}_{\mathrm{G}} = \begin{vmatrix} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = -gt + v_{0y} \end{vmatrix}$$

Conditions initiales : $\overrightarrow{v}_{\mathrm{G}}(t=0) = \overrightarrow{v}_0$

$$\Rightarrow \quad v_{0x} = v_0 \cos\alpha \quad \text{et} \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{v}_{\mathrm{G}} = \begin{vmatrix} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$$

Seconde intégration par rapport au temps :

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \begin{vmatrix} x(t) = \left(v_0 \cos\alpha\right) t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\alpha\right) t + y_0 \end{vmatrix}$$

Conditions initiales : G en O à $t = 0$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \text{et} \quad y_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \begin{vmatrix} x(t) = \left(v_0 \cos\alpha\right) t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\alpha\right) t \end{vmatrix}$$

2.3.2. Éliminons t en l'exprimant à l'aide de $x(t)$:

$$x(t) = \left(v_0 \cos\alpha\right) t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Remplaçons dans l'expression de $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha)\, x$$

Identification avec la solution proposée par l'énoncé :

$$\begin{cases} \mathrm{A} = -\dfrac{1}{2} \dfrac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \\ \mathrm{B} = \tan\alpha \end{cases}$$

Analyse dimensionnelle :

$$\begin{cases} [\mathrm{A}] = \dfrac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}}{\left(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right)^2} = \dfrac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}} = \mathrm{m}^{-1} \\ [\mathrm{B}] = \text{sans unité} \end{cases}$$

⋆⋆⋆

Grille DS3 2013

1 – Aquariophilie **.../20**

- ❑ $H_3O^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightarrow 2\,H_2O_{(\ell)}$
- ❑ Totale, rapide, unique
- ❑ Équivalence : proportions stœchiométriques
- ❑ $c_A = c_B V_{BE}/V_A$
- ❑ $V_{BE} = 25,7 \pm 0,5$ mL
- ❑ $c_A = 5,1 \times 10^{-2}$ mol $\cdot$ L^{-1}
- ❑ $[H_3O^+] = 50 c_A \simeq 2,5$ mol $\cdot$ L^{-1}
- ❑ $pH_E = 7,0$ donc choix BBT
- ❑ Diagramme de prédominance
- ❑ jaune $\rightarrow$ bleu + teinte sensible verte à la gtte près
- ❑ Dilution $c_2 = c_1 V_1/V_2 = 5,0 \times 10^{-4}$ mol $\cdot$ L^{-1}
- ❑ $pH = -\log[H_3O^+] = 3,3$
- ❑ $\sigma = \lambda_{NH_4^+}[NH_4^+] + \lambda_{OCN^-}[OCN^-]$
- ❑ $[NH_4^+] = \sigma/\lambda_{NH_4^+} + \lambda_{OCN^-}$
- ❑ Annexe : Tableau d'avancement $n - x$, x, x
- ❑ Annexe : Tracé x_{110}
- ❑ $[NH_4^+] = x/V$
- ❑ $x_{max} = 2,0 \times 10^{-3}$ mol
- ❑ $\tau_{110} = 0,65 = 65\,\%$
- ❑ $x_f = 2,0 \times 10^{-3}$ mol + $\tau = 1,0$ réaction totale

2 – Chute des boulets **.../20**

- ❑ $x_1 = \frac{1}{2} g \tau^2$, $x_2 = \frac{1}{2} g (4\tau^2)$, $x_3 = \frac{1}{2} g (9\tau^2)$, tout ou rien
- ❑ $h_1 = \frac{1}{2} g \tau^2$, $h_2 = 3h_1$, $h_3 = 5h_1$, -0,5 par erreur
- ❑ Oui, on retrouve la suite proposée par Galilée + Justification $h_2 = 2h_1$ et $h_3 = 5h_1$
- ❑ (b) pour Aristote : la durée diminue si la masse augmente, tout ou rien avec suivant !
- ❑ (c) pour Galilée : la durée est indépendante de la masse, tout ou rien avec précédent !
- ❑ $\Delta t = \sqrt{2H/g} = 3,4$ s, calculé
- ❑ Mesure approximative de Δt ou de H ou frottements, un seul des trois exigé
- ❑ Énoncé de la 3ème loi de Newton
- ❑ Explication 2 systèmes
- ❑ $F_A = 0,16$ N, calculé
- ❑ $P = mg = 9,8 \times 10^2$ N *(tout ou rien)*
- ❑ $P/F_A \gg 1$ donc poussée d'Archimède négligeable
- ❑ Bilan des forces : poids du boulet
- ❑ 2ème loi de Newton ou $\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{a_G}$
- ❑ $\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg \end{cases}$ *(ou projection correcte équivalente)*
- ❑ Double intégration
- ❑ Double conditions initiales (x en cos et y en sin)
- ❑ $y(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha)\, x$
- ❑ Identification $A = -\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}$ et $B = \tan\alpha$
- ❑ Analyse dimensionnelle $[A] = m^{-1}$ et $[B] =$ sans unité

Total .../40

Note **.../20**